● 15-1 ●

【演習15-1】式(15-1)″を使って解くが，各端末条件に応じて，**表15-1**の座屈長さ ℓ_{cr} を適用する。

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\ell_{cr}}{r}\right)^2} \qquad (15\text{-}1)''$$

$$\frac{\ell_{cr}}{r}=\sqrt{\frac{\pi^2\times 207\times 10^3}{300}}$$

$$=\pi\sqrt{690} \qquad (15\text{-A})$$

一端固定他端自由の場合，$\ell_{cr}=2\ell$ を式(15-A)に代入する。

$$\frac{2\ell}{r}=\pi\sqrt{690}$$

$$\frac{\ell}{r}=\frac{\pi\sqrt{690}}{2}=41.3$$

細長比 $\frac{\ell}{r}$ が41.3以上でオイラー座屈を適用できる。

両端滑節の場合，$\ell_{cr}=\ell$ を式(15-A)に代入する。

$$\frac{\ell}{r}=\pi\sqrt{690}$$

$$\frac{\ell}{r}=82.5$$

細長比 $\frac{\ell}{r}$ が82.5以上でオイラー座屈を適用できる。

両端固定の場合，$\ell_{cr}=0.5\ell$ を式(15-A)に代入する。

$$\frac{0.5\ell}{r}=\pi\sqrt{690}$$

$$\frac{\ell}{r}=2\pi\sqrt{690}\ =165.0$$

細長比 $\frac{\ell}{r}$ が165.0以上でオイラー座屈を適用できる。

一端固定他端滑節の場合，$\ell_{cr}=0.7\ell$ を式(15-A)に代入する。

$$\frac{0.7\ell}{r}=\pi\sqrt{690}$$

$$\frac{\ell}{r}=\frac{\pi\sqrt{690}}{0.7}=117.9$$

細長比 $\frac{\ell}{r}$ が117.9以上でオイラー座屈を適用できる。以上をまとめると右表となる。

端末条件	一端固定 他端自由	両端滑節	両端固定	一端固定 他端滑節
$\frac{\ell}{r}$	＞41.3	＞82.5	＞165.0	＞117.9

【演習15−2】この問題も，式(15−1)″を利用すれば良い。両端固定だから，式(15−1)″に $\ell_{cr}=0.5\ell$ を代入する。

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\ell_{cr}}{r}\right)^2} \tag{15−1″}$$

$$=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{0.5\ell}{r}\right)^2}$$

$$=\frac{4\pi^2 E}{\left(\frac{\ell}{r}\right)^2}$$

さて，この式で未知なのは回転半径rだ。これは，断面二次モーメントIと断面積Aから次のように定義された。

$$r=\sqrt{\frac{I}{A}}$$

長方形断面の場合には，幅b，高さhとすると，

$$I=\frac{bh^3}{12}$$

$$A=bh$$

と表せるから，回転半径は次のように整理できる。

$$r=\sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}}$$

$$=h\sqrt{\frac{1}{12}}$$

ここで，高さhには12mm，8mmのどちらを適用すれば良いか。プラスチック定規を立てて座屈させてみると分かりやすいが，小さい方の値である。その方が断面二次モーメントが小さくなる，すなわち座屈を起こしやすくなるからだ。従って，回転半径rは次の通りだ。

$$r=h\sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$=8\sqrt{\frac{1}{12}}$$

さて，確かめておくことがある。本当にオイラーの座屈荷重を適用しても良いか否かだ。細長比 $\frac{\ell}{r}$ は，

$$\frac{\ell}{r}=\frac{400}{8\sqrt{\frac{1}{12}}}$$

$$=173.2$$

である。**演習15−1**の結果より，両端固定の場合にオイラーの座屈荷重を適用できるのは165.0以上。この場合が173.2だから，適用範囲内だ。

最後に回転半径と問題に与えられた値を，式(15−1)″から導いた両端固定のオイラーの座屈応力の式に代入する。

$$\sigma_{cr}=\frac{4\pi^2 E}{\left(\frac{\ell}{r}\right)^2}$$

$$=\frac{4\pi^2 E r^2}{\ell^2}$$

$$=\frac{4\pi^2\times 207\times 10^3\times\frac{8^2}{12}}{400^2}$$

$$=272.4\text{MPa}$$

【演習15−3】ランキンの公式は本文の式(15−7)。

$$\sigma_{cr}=\frac{\sigma_0}{1+\alpha\left(\frac{\ell_{cr}}{r}\right)^2} \tag{15−7}$$

連接棒が軟鋼であることから本文の**表15−3**より，右辺の式中の σ_0 は3400kgf/cm²，α は1/7500。両端滑節であることから座屈長さ $\ell_{cr}=\ell$ である。さらに，求めたい連接棒の直径をd（cm）とすると，回転半径rは，断面二次モーメント$I=\frac{\pi d^4}{64}$，面積 $A=\frac{\pi d^2}{4}$ から，

$$r=\sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}}}$$

$$=\frac{d}{4}\,(\mathrm{cm})$$

と表せる。

一方，左辺の限界圧縮応力は安全率S_fを用いて次式のように表せる。

$$\frac{\sigma_{cr}}{S_f}=\frac{P}{A}$$

$$\sigma_{cr}=\frac{PS_f}{A}$$

$$=\frac{10000\times 7}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$=\frac{280000}{\pi d^2}\,(\mathrm{kgf/cm^2})$$

これらの値と問題に与えられた数値を式(15−7)に代入，dに関して整理すれば良い。

$$\sigma_{cr}=\frac{\sigma_0}{1+\alpha\left(\frac{\ell}{r}\right)^2}$$

$$\frac{280000}{\pi d^2}=\frac{3400}{1+\frac{1}{7500}\left(\frac{100}{\frac{d}{4}}\right)^2}$$

$$2550\pi d^4-210000d^2-4480000=0$$

$$d^2=40.14$$

$$d=6.34\mathrm{cm}$$

ここでも，ランキンの公式が適用できるか否かを確かめておこう。細長比$\frac{\ell_{cr}}{r}$は，

$$\frac{\ell_{cr}}{r}=\frac{100}{\frac{d}{4}}$$

$$=\frac{100}{\frac{6.34}{4}}$$

$$=63.1$$

となる。本文の**表15−3**より，ランキンの公式が適用できる範囲は軟鋼で90以下。この場合には63.1だから適用可能。

【演習15−4】ジョンソンの放物線公式は，本文の式(15−8)である。

$$\sigma_{cr}=\sigma_0-\frac{{\sigma_0}^2}{4\pi^2\mathrm{E}}\left(\frac{\ell_{cr}}{r}\right)^2 \qquad (15-8)$$

ここで，圧縮強さσ_0は2100kgf/cm²，縦弾性係数Eは2.1×10^6kgf/cm²，両端固定の座屈長さℓ_{cr}は0.5ℓ，回転半径rは断面二次モーメント$I=\frac{5^4}{12}$，面積$A=5^2$から，

$$r=\sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{5^4}{12}}{5^2}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{12}}(\mathrm{cm})$$

と計算できる。一方，細長比$\frac{\ell_{cr}}{r}$は，

$$\frac{\ell_{cr}}{r}=\frac{0.5\times 100}{\frac{5}{\sqrt{12}}}$$

$$=\frac{50}{\frac{5}{\sqrt{12}}}$$

$$=34.6$$

である。以上を式(15−8)に代入して解けば，座屈応力が求まる。

$$\sigma_{cr}=\sigma_0-\frac{{\sigma_0}^2}{4\pi^2\mathrm{E}}\left(\frac{\ell_{cr}}{r}\right)^2 \qquad (15-8)$$

$$=2100-\frac{2100^2}{4\pi^2\times 2.1\times 10^6}(34.6)^2$$

$$=2036.2\mathrm{kgf/cm^2}$$

一方，ジョンソンの直線公式は本文の式(15−9)。

$$\sigma_{cr}=\sigma_{pl}-\frac{2\sigma_{pl}}{9\pi}\left(\frac{\ell_{cr}}{r}\right)\sqrt{\frac{3\sigma_{pl}}{E}} \qquad (15\text{–}9)$$

この式で，回転半径rは既に求めた値を使い，比例限度σ_{pl}には問題に与えられた2100kgf/cm²を用いる。

$$\sigma_{cr}=\sigma_{pl}-\frac{2\sigma_{pl}}{9\pi}\left(\frac{\ell_{cr}}{r}\right)\sqrt{\frac{3\sigma_{pl}}{E}} \qquad (15\text{–}9)$$

$$=2100-\frac{2\times 2100}{9\pi}\times(34.6)\sqrt{\frac{3\times 2100}{2.1\times 10^6}}$$

$$=1818.2\text{kgf/cm}^2$$

なお，本文の式(15–9)′より，

$$\frac{\ell_{cr}}{r}<\pi\sqrt{\frac{3E}{\sigma_{pl}}}=\pi\sqrt{\frac{3\times 2.1\times 10^6}{2100}}=172.1 \qquad (15\text{–}9)'$$

で，細長比は既に求めた通り34.6だから，式(15–9)′を満たし，ジョンソンの公式が適用できることになる。

【演習15–5】上述の**演習15–4**と全く同じ手順。ジョンソンの放物線公式は式(15–8)。

$$\sigma_{cr}=\sigma_0-\frac{\sigma_0^2}{4\pi^2 E}\left(\frac{\ell_{cr}}{r}\right)^2 \qquad (15\text{–}8)$$

圧縮強さσ_0は2000kgf/cm²，縦弾性係数Eは1×10⁶kgf/cm²，一端固定他端自由の座屈長さℓ_{cr}は2ℓ，回転半径rは断面二次モーメント$I=\pi(d_2^4-d_1^4)/64$，面積$A=\pi(d_2^2-d_1^2)/4$から，

$$r=\sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{\pi(6^4-3^4)}{64}}{\frac{\pi(6^2-3^2)}{4}}}$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{4}\text{(cm)}$$

で，細長比$\frac{\ell_{cr}}{r}$は，

$$\frac{\ell_{cr}}{r}=\frac{2\ell}{\frac{3\sqrt{5}}{4}}$$

$$=\frac{2\times 45}{\frac{3\sqrt{5}}{4}}$$

$$=53.7$$

となる。以上を式(15–8)に代入して解けば，座屈荷重が求まる。

$$\sigma_{cr}=\sigma_0-\frac{\sigma_0^2}{4\pi^2 E}\left(\frac{\ell_{cr}}{r}\right)^2 \qquad (15\text{–}8)$$

$$=2000-\frac{2000^2}{4\pi^2\times 1\times 10^6}(53.7)^2$$

$$=1707.8\text{kgf/cm}^2$$

一方，ジョンソンの直線公式は式(15–9)。

$$\sigma_{cr}=\sigma_{pl}-\frac{2\sigma_{pl}}{9\pi}\left(\frac{\ell_{cr}}{r}\right)\sqrt{\frac{3\sigma_{pl}}{E}} \qquad (15\text{–}9)$$

この式で，回転半径rは既に求めた値を使い，比例限度σ_{pl}には問題に与えられた2000kgf/cm²を用いる。

$$\sigma_{cr}=\sigma_{pl}-\frac{2\sigma_{pl}}{9\pi}\left(\frac{\ell_{cr}}{r}\right)\sqrt{\frac{3\sigma_{pl}}{E}} \qquad (15\text{–}9)$$

$$=2000-\frac{2\times 2000}{9\pi}\times(53.7)\sqrt{\frac{3\times 2000}{1\times 10^6}}$$

$$=1411.5\text{kgf/cm}^2$$

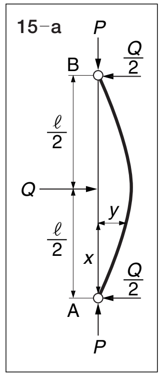
ここでも，本文の式(15–9)′より，

$$\frac{\ell_{cr}}{r}<\pi\sqrt{\frac{3E}{\sigma_{pl}}}=\pi\sqrt{\frac{3\times 1\times 10^6}{2000}}=121.7 \qquad (15\text{–}9)'$$

で，細長比は既に求めた通り53.7だから，式(15–9)′を満たし，ジョンソンの公式が適用できることになる。

【演習15–6】考え方は，本文の一端固定他端自由の限界荷重，あるいは一端固定他端滑節の限界荷重の求め方で学んだように，位置xにおける曲げモーメント

M_xを求めてからたわみ曲線を計算していく（**図15-a**）。この問題の場合，位置xにおける曲げモーメントM_xは次式となる。



$$M_x = -P\times y - \frac{Q}{2}\times x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\ell}{2}\right)$$

念のためだが，右辺の第1項目は荷重Pと垂直距離yの積。第2項目は集中荷重Qが作用したときの下要素の上断面におけるモーメントの釣り合い（90°時計周りに回転して考えれば，お馴染みの左要素の右断面におけるモーメントの釣り合い）から計算したものだ。これを，次の梁のたわみ曲線の微分方程式に代入する〔式(15-B)の符号は本来マイナスだが，第14章の解説のときと同様に省略して考えていく〕。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} \tag{15-B}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}\left(Py + \frac{Qx}{2}\right) \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\ell}{2}\right) \tag{15-B$'$}$$

ここで，

$$\frac{P}{EI} = k^2 \tag{15-C}$$

と置き，式(15-B)′をさらに書き換える。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = -\frac{Qx}{2EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = -k^2\frac{Qx}{2P} \tag{15-B$''$}$$

この微分方程式の解の求め方は省略するが，詳しくは解説編第14章のワンポイント「**同次微分方程式の一般解と非同次微分方程式の特殊解**」を参照して欲しい。答えは，次の通りだ。

$$y = c_1\cos kx + c_2\sin kx - \frac{Qx}{2P} \tag{15-D}$$

続いて，境界（端末）条件から式(15-D)中の定数c_1とc_2を決定する。条件は**図15-a**から明らかな通り次の三つ。

条件1：滑節点Aの変位がゼロ　⇔　$x=0$で$y=0$

条件2：滑節点Bの変位がゼロ　⇔　$x=\ell$で$y=0$

条件3：中点のたわみ角がゼロ　⇔　$\frac{\ell}{2}$で$\frac{dy}{dx}=0$

これらを式(15-D)に代入していく。まず条件1。

$$y = c_1\cos kx + c_2\sin kx - \frac{Qx}{2P} \tag{15-D}$$

$$0 = c_1\cos(k\times 0) + c_2\sin(k\times 0) - \frac{Q\times 0}{2P}$$

$$c_1 = 0 \tag{15-E}$$

次に条件2だが，ここでは使えない。最初に求めた曲げモーメントが$0 \leqq x \leqq \frac{\ell}{2}$の範囲のものだからだ。そこで条件3と，式(15-E)を使う。

$$\frac{dy}{dx} = -c_1k\sin kx + c_2k\cos kx - \frac{Q}{2P} \tag{15-D}$$

$$0 = c_2k\cos\frac{k\ell}{2} - \frac{Q}{2P}$$

$$c_2 = \frac{Q}{2Pk\cos\frac{k\ell}{2}} \tag{15-F}$$

式(15-E)(15-F)より，たわみ曲線は以下の通り。

$$y = c_1\cos kx + c_2\sin kx - \frac{Qx}{2P} \tag{15-D}$$

$$= \frac{Q}{2Pk\cos\frac{k\ell}{2}}\sin kx - \frac{Qx}{2P} \tag{15-D$'$}$$

ここで，問題の最大たわみδ_{max}は式(15-D)′を微分して調べるまでもなく，中点で発生するのは明らか。従って，式(15-D)′のxに$\frac{\ell}{2}$を代入すれば，最大たわみδ_{max}が求まる。

$$\delta_{max} = \frac{Q}{2Pk\cos\frac{k\ell}{2}}\sin\frac{k\ell}{2} - \frac{Q\ell}{4P}$$

$$=\frac{Q}{2Pk}\tan\frac{k\ell}{2}-\frac{Q\ell}{4P}$$

$$=\frac{Q}{4P}\left(\frac{2}{k}\tan\frac{k\ell}{2}-\ell\right) \tag{15-G}$$

続いて座屈荷重P_{cr}だが，これはδ_{max}が無限大になるときの荷重と言い換えることができる。すると，式(15−G)の$\tan\frac{k\ell}{2}$が無限大，$\frac{k\ell}{2}$が$\frac{\pi}{2}$のときだ。つまり，

$$\frac{k\ell}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$k=\frac{\pi}{\ell}$$

これを式(15−C)に代入すれば，座屈荷重P_{cr}が計算できる。

$$\frac{P}{\mathrm{EI}}=k^2 \tag{15-C}$$

$$P_{cr}=k^2\mathrm{EI}$$

$$=\frac{\pi^2\mathrm{EI}}{\ell^2}$$

座屈荷重P_{cr}に対して，横荷重Qは一見影響しそうだが，最後の結果から明らかな通り，Qは関与しない。ここは重要，しっかり頭に入れておこう。

【演習15−7】考え方は，上述の**演習15−6**と全く同じだ（**図15−b**）。まず位置xにおける曲げモーメントM_xだが，この問題の場合には次式となる。

$$M_x=-Py-\left(\frac{w\ell x}{2}-\frac{wx^2}{2}\right)$$

右辺の第1項目は上述の**演習15−6**と同じ。カッコでくくった第2項目は集中荷重wが作用したときの下要素の上断面におけるモーメントの釣り合い（90°時計周りに回転して考えれば，お馴染みの左要素の右断面におけるモーメントの釣り合い）から計算したものだ。これを，次の梁のたわみ曲線の微分方程式に代入する（式①の符号は本来マイナスだが，上述の**演習15−6**と同様に省略して考えていく）。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_x}{\mathrm{EI}} \tag{15-B}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{\mathrm{EI}}\left(Py+\frac{w\ell x}{2}-\frac{wx^2}{2}\right) \tag{15-H}$$

ここで，

$$\frac{P}{\mathrm{EI}}=k^2 \tag{15-C}$$

と置き，式(15−H)を書き換える。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{\mathrm{EI}}y=-\frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{w\ell x}{2}-\frac{wx^2}{2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=\frac{k^2}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right) \tag{15-H)$'$}$$

実は，この微分方程式の解は上述の**演習15−6**よりちょっと手強い。きちんと，同次微分方程式の一般解と非同次微分方程式の特殊解を求めていく必要がある。とはいえ，同次微分方程式の一般解は既に何度も登場している次式だ。

$$Y(x)=\mathrm{c}_1\cos kx+\mathrm{c}_2\sin kx \tag{15-I}$$

問題は，非同次微分方程式の特殊解（本文のワンポイント参照）。解いていく過程で理解して頂くが，式(15−H)′の右辺がxに関する2次以上の関数の場合には，これまでのような機械的な（k^2を除いた部分を特殊解とする）やり方は通用しない。実際に解いてみよう。式(15−H)′で微分演算子$\frac{d}{dx}$をDとおき，yについて整理していく。

$$(D^2+k^2)y=\frac{k^2}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)$$

$$y=\frac{k^2}{D^2+k^2}\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\frac{D^2}{k^2}}\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)$$

$$=\left(1-\frac{D^2}{k^2}+\frac{D^4}{k^4}-\frac{D^6}{k^6}+\cdots\right)\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right) \tag{15-J}$$

3番目の式から4番目の式への展開では本文の頭注で紹介した，「**等比級数の総和**」を利用した。

ここで，先ほど説明した，2次以上の関数…，が理解して頂ける。式(15−J)の

右辺で，$\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)=Q$ とすれば，

$$y=\left(1-\frac{D^2}{k^2}+\frac{D^4}{k^4}-\frac{D^6}{k^6}+\cdots\right)\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)$$

$$=Q-\frac{D^2Q}{k^2}+\frac{D^4Q}{k^4}-\frac{D^6Q}{k^6}+\cdots$$

$$=Q-\frac{D^2Q}{k^2} \qquad (15\text{–J})'$$

となる。Qは二次関数だから，3階以上の微分はゼロになるものの2階の微分までは無視できない。解説編も含めてこれまではQがたまたま1次関数以下だったために，2階以上の微分を無視し簡単に（機械的に）特解が求められたのである。つまり，この場合の特殊解は式(15–J)′より，以下の通りとなる。

$$y=Q-\frac{D^2Q}{k^2}$$

$$=\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)-\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{1}{Pk^2}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)-\frac{w}{Pk^2} \qquad (15\text{–J})''$$

以上，式(15–I)と(15–J)″より式(15–H)′の解は次になる。

$$y=c_1\cos kx+c_2\sin kx+\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}-\frac{w}{k^2}\right) \qquad (15\text{–K})$$

続いて，境界（端末）条件から式(15–K)中の定数c_1とc_2を決定する。条件は**図15–b**から明らかな通り次の三つ。

条件1：滑節点Aの変位がゼロ　⇔　$x=0$で$y=0$

条件2：滑節点Bの変位がゼロ　⇔　$x=\ell$で$y=0$

条件3：中点のたわみ角がゼロ　⇔　$x=\frac{\ell}{2}$ で $\frac{dy}{dx}=0$

これらを式(15–K)に代入していく。まず条件1。

$$y=c_1\cos kx+c_2\sin kx+\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}-\frac{w}{k^2}\right) \qquad (15\text{–K})$$

$$0=c_1-\frac{w}{Pk^2}$$

$$c_1=\frac{w}{Pk^2} \qquad (15\text{–L})$$

次に条件2。式(15–L)も使う。

$$y=c_1\cos kx+c_2\sin kx+\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}-\frac{w}{k^2}\right) \qquad (15\text{–K})$$

$$0=\frac{w}{Pk^2}\cos k\ell+c_2\sin k\ell+\frac{1}{P}\left(\frac{w\ell^2}{2}-\frac{w\ell^2}{2}-\frac{w}{k^2}\right)$$

$$c_2=\frac{w}{Pk^2}\,\frac{1-\cos k\ell}{\sin k\ell} \qquad (15\text{–M})$$

式(15–L)(15–M)より，たわみ曲線は以下の通り。

$$y=c_1\cos kx+c_2\sin kx+\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}-\frac{w}{k^2}\right) \qquad (15\text{–K})$$

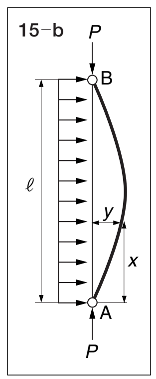
$$=\frac{w}{Pk^2}\cos kx+\frac{w}{Pk^2}\,\frac{1-\cos k\ell}{\sin k\ell}\sin kx+\frac{w}{2P}\left(x^2-\ell x-\frac{2}{k^2}\right) \qquad (15\text{–K})'$$

ここで，問題の最大たわみδ_{max}は中点で発生する。従って式(15–K)′のxに$\frac{\ell}{2}$を代入すれば，最大たわみδ_{max}が求まる。

$$\delta_{max}=\frac{w}{Pk^2}\cos\frac{k\ell}{2}+\frac{w}{Pk^2}\,\frac{1-\cos k\ell}{\sin k\ell}\sin\frac{k\ell}{2}+\frac{1}{P}\left(\frac{w\ell^2}{8}-\frac{w\ell^2}{4}-\frac{w}{k^2}\right)$$

$$=\frac{w}{Pk^2}\,\frac{2\cos^2\frac{k\ell}{2}+1-\cos k\ell}{2\cos\frac{k\ell}{2}}-\frac{w}{P}\left(\frac{\ell^2}{8}+\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=\frac{w}{Pk^2}\left(\sec\frac{k\ell}{2}-1\right)-\frac{w\ell^2}{8P} \qquad (15\text{–N})$$



続いて座屈荷重P_{cr}だが，やはりδ_{max}が無限大になるとき。つまり式(15–N)の$\sec\frac{k\ell}{2}$が無限大，$\frac{k\ell}{2}$が$\frac{\pi}{2}$のときだ。従って，

$$\frac{k\ell}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$k=\frac{\pi}{\ell}$$

で，これを式(15–C)に代入すれば，座屈荷重P_{cr}が計算できる。

$$\frac{P}{\mathrm{E}I}=k^2 \qquad (15\text{–C})$$

$$P_{cr}=k^2\mathrm{E}I$$

$$=\frac{\pi^2\mathrm{E}I}{\ell^2}$$

演習15–6と同様，座屈荷重P_{cr}には等分布横荷重wは関与しないのである。

【**演習15–8**】既に解いた**演習15–6**との違いは，軸圧縮荷重Pがeだけ偏心している点。この場合には，軸圧縮荷重Pによるモーメントが違ってくる。具体的には，垂直距離が（$y+e$）に広がるため，

$$M_x=-P(y+e)-\frac{Qx}{2} \quad \left(0\leqq x\leqq\frac{\ell}{2}\right) \qquad (15\text{–O})$$

となる。あとは，**演習15–6**と全く同じように解いていけば良い。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_x}{\mathrm{E}I} \qquad (15\text{–B})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{\mathrm{E}I}\left\{P(y+e)+\frac{Qx}{2}\right\} \quad \left(0\leqq x\leqq\frac{\ell}{2}\right) \qquad (15\text{–P})$$

ここで，

$$\frac{P}{\mathrm{E}I}=k^2 \qquad (15\text{–C})$$

と置き，式(15–P)をさらに書き換える。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=-k^2\left(e+\frac{Qx}{2P}\right) \qquad (15\text{–P})'$$

この微分方程式の解は次の通りだ（右辺はxの一次関数だから，非同次微分方程式の特殊解も簡単だ）。

$$y=\mathrm{c}_1\cos kx+\mathrm{c}_2\sin kx-\left(e+\frac{Qx}{2P}\right) \qquad (15\text{–Q})$$

続いて，境界（端末）条件から式(15–Q)中の定数c_1とc_2を決定する。条件は**演習15–6**と変わらない。

条件1：滑節点の変位がゼロ　⇔　$x=0$で$y=0$

条件2：滑節点の変位がゼロ　⇔　$x=\ell$で$y=0$

条件3：中点のたわみ角がゼロ　⇔　$x=\dfrac{\ell}{2}$で$\dfrac{dy}{dx}=0$

これらを式(15–Q)に代入していく。まず条件1。

$$y=\mathrm{c}_1\cos kx+\mathrm{c}_2\sin kx-\left(e+\frac{Qx}{2P}\right) \qquad (15\text{–Q})$$

$$0=\mathrm{c}_1-e$$

$$\mathrm{c}_1=e \qquad (15\text{–R})$$

次に条件2だが，**演習15–6**と同様，最初に求めた曲げモーメントが$0\leqq x\leqq\dfrac{\ell}{2}$の範囲のものだから使えない。そこで条件3と式(15–R)を使う。

$$\frac{dy}{dx}=-\mathrm{c}_1k\sin kx+\mathrm{c}_2k\cos kx-\frac{Q}{2P} \qquad (15\text{–Q})$$

$$0=-ek\sin\frac{k\ell}{2}+\mathrm{c}_2k\cos\frac{k\ell}{2}-\frac{Q}{2P}$$

$$\mathrm{c}_2=\frac{2Pek\sin\dfrac{k\ell}{2}+Q}{2Pk\cos\dfrac{k\ell}{2}} \qquad (15\text{–S})$$

式(15–R)(15–S)より，たわみ曲線は以下の通り。

$$y=\mathrm{c}_1\cos kx+\mathrm{c}_2\sin kx-\left(e+\frac{Qx}{2P}\right) \qquad (15\text{–Q})$$

$$=e\cos kx+\frac{2Pek\sin\dfrac{k\ell}{2}+Q}{2Pk\cos\dfrac{k\ell}{2}}\sin kx-\left(e+\frac{Qx}{2P}\right) \qquad (15\text{–Q})'$$

ここで，問題の最大たわみδ_{max}はやはり中点で発生する。従って，式(15–Q)′のxに$\dfrac{\ell}{2}$を代入すれば，最大たわみδ_{max}が求まる。

$$\delta_{max}=e\cos\frac{k\ell}{2}+\frac{2Pek\sin\dfrac{k\ell}{2}+Q}{2Pk\cos\dfrac{k\ell}{2}}\sin\frac{k\ell}{2}-\left(e+\frac{Q\ell}{4P}\right)$$

$$=e\left(\cos\frac{k\ell}{2}+\tan\frac{k\ell}{2}\sin\frac{k\ell}{2}-1\right)+\frac{Q}{4P}\left(\frac{2}{k}\tan\frac{k\ell}{2}-\ell\right) \qquad (15\text{–T})$$

続いて座屈荷重P_{cr}は，δ_{max}が無限大になるとき。すなわち，式(15−T)の $\tan\frac{k\ell}{2}$ が無限大，$\frac{k\ell}{2}$ が $\frac{\pi}{2}$ のときだ。つまり，

$$\frac{k\ell}{2}=\frac{\pi}{2}$$
$$k=\frac{\pi}{\ell}$$

で，これを式(15−C)に代入すれば，座屈荷重P_{cr}が計算できるが，やはり横荷重Q，その作用位置eの影響は受けない。

$$\frac{P}{\mathrm{E}I}=k^2 \tag{15−C}$$
$$P_{cr}=k^2\mathrm{E}I$$
$$=\frac{\pi^2\mathrm{E}I}{\ell^2}$$

最後に，最大曲げモーメントだが，やはり中点に生じる。つまり式(15−O)のxに$\frac{\ell}{2}$を，yにはδ_{max}を代入する。

$$M_x=-P(y+e)-\frac{Qx}{2} \tag{15−O}$$
$$=-P\left\{e\left(\cos\frac{k\ell}{2}+\tan\frac{k\ell}{2}\sin\frac{k\ell}{2}-1\right)+\frac{Q}{4P}\left(\frac{2}{k}\tan\frac{k\ell}{2}-\ell\right)+e\right\}-\frac{Q\ell}{4}$$
$$=-Pe\left(\cos\frac{k\ell}{2}+\tan\frac{k\ell}{2}\sin\frac{k\ell}{2}\right)-\frac{Q}{2k}\tan\frac{k\ell}{2}$$

ただし，$k=\sqrt{\frac{P}{\mathrm{E}I}}$

である。

【**演習15−9**】**演習15−7**の結果をベースに，上述の**演習15−8**と全く同じ要領で解いていこう。まず位置xにおける曲げモーメントM_xは次式。

$$M_x=-P(y+e)-\left(\frac{w\ell x}{2}-\frac{wx^2}{2}\right) \tag{15−U}$$

これを，次式に代入する。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_x}{\mathrm{E}I} \tag{15−B}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{\mathrm{E}I}\left\{P(y+e)+\frac{w\ell x}{2}-\frac{wx^2}{2}\right\} \tag{15−V}$$

ここで，

$$\frac{P}{\mathrm{E}I}=k^2 \tag{15−C}$$

と置き，式(15−V)を書き換える。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{\mathrm{E}I}y=-\frac{1}{\mathrm{E}I}\left(Pe+\frac{w\ell x}{2}-\frac{wx^2}{2}\right)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=k^2\left\{\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)-e\right\} \tag{15−V}'$$

この微分方程式の同次微分方程式の一般解は次式。

$$Y(x)=\mathrm{c}_1\cos kx+\mathrm{c}_2\sin kx \tag{15−W}$$

非同次微分方程式の特殊解は**演習15−7**と全く同じように解ける。すなわち，

$$\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)-e=Q$$

とすれば，次式の通り計算できる。

$$y=Q-\frac{D^2Q}{k^2} \tag{15−X}$$
$$=\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)-e-\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{1}{Pk^2}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)-\frac{e}{k^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}\right)-e-\frac{w}{Pk^2}$$
$$=\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}-\frac{w}{k^2}\right)-e \tag{15−X}'$$

式(15−W)と式(15−X)′より，式(15−V)′の微分方程式の解は次になる。

$$y=\mathrm{c}_1\cos kx+\mathrm{c}_2\sin kx+\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}-\frac{w}{k^2}\right)-e \tag{15−Y}$$

続いて，境界（端末）条件から式(15−Y)中の定数c_1とc_2を決定する。条件は**演習15−7**と同様だ。

条件1：滑節点の変位がゼロ　⇔　$x=0$で$y=0$
条件2：滑節点の変位がゼロ　⇔　$x=\ell$ で$y=0$

条件3：中点のたわみ角がゼロ　⇔　$x=\dfrac{\ell}{2}$ で $\dfrac{dy}{dx}=0$

これらを式(15−Y)に代入していく。まず条件1。

$$y=\mathrm{c_1}\cos kx+\mathrm{c_2}\sin kx+\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}-\frac{w}{k^2}\right)-e \qquad (15\text{−Y})$$

$$0=\mathrm{c_1}-\frac{w}{Pk^2}-e$$

$$\mathrm{c_1}=\frac{w}{Pk^2}+e \qquad (15\text{−Z})$$

次に条件2。式(15−Z)も使う。

$$y=\mathrm{c_1}\cos kx+\mathrm{c_2}\sin kx+\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}-\frac{w}{k^2}\right)-e \qquad (15\text{−Y})$$

$$0=\left(\frac{w}{Pk^2}+e\right)\cos k\ell+\mathrm{c_2}\sin k\ell+\frac{1}{P}\left(\frac{w\ell^2}{2}-\frac{w\ell^2}{2}-\frac{w}{k^2}\right)-e$$

$$\mathrm{c_2}=\frac{\left(\dfrac{w}{Pk^2}+e\right)(1-\cos k\ell)}{\sin k\ell} \qquad (15\text{−a})$$

式(15−Z)(15−a)より，たわみ曲線は以下の通り。

$$y=\mathrm{c_1}\cos kx+\mathrm{c_2}\sin kx+\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}-\frac{w}{k^2}\right)-e \qquad (15\text{−Y})$$

$$=\left(\frac{w}{Pk^2}+e\right)\cos kx+\frac{\left(\dfrac{w}{Pk^2}+e\right)(1-\cos k\ell)}{\sin k\ell}\sin kx$$

$$+\frac{1}{P}\left(\frac{wx^2}{2}-\frac{w\ell x}{2}-\frac{w}{k^2}\right)-e \qquad (15\text{−Y})'$$

ここで，問題の最大たわみ δ_{max} は中点で発生する。従って式(15−Y)′の x に $\dfrac{\ell}{2}$ を代入すれば，最大たわみ δ_{max} が求まる。

$$\delta_{max}=\left(\frac{w}{Pk^2}+e\right)\cos\frac{k\ell}{2}+\frac{\left(\dfrac{w}{Pk^2}+e\right)(1-\cos k\ell)}{\sin k\ell}\sin\frac{k\ell}{2}$$

$$+\frac{1}{P}\left(\frac{w\ell^2}{8}-\frac{w\ell^2}{4}-\frac{w}{k^2}\right)-e$$

$$=\frac{\left(\dfrac{w}{Pk^2}+e\right)}{\cos\dfrac{k\ell}{2}}-\left(\frac{w\ell^2}{8P}+\frac{w}{Pk^2}+e\right)$$

$$=\left(\frac{w}{Pk^2}+e\right)\left(\sec\frac{k\ell}{2}-1\right)-\frac{w\ell^2}{8P} \qquad (15\text{−b})$$

続いて座屈荷重 P_{cr} だが，やはり δ_{max} が無限大になるとき。つまり式(15−b)の $\sec\dfrac{k\ell}{2}$ が無限大，$\dfrac{k\ell}{2}$ が $\dfrac{\pi}{2}$ のときだ。従って，

$$\frac{k\ell}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$k=\frac{\pi}{\ell}$$

これを式(15−C)に代入すれば，座屈荷重 P_{cr} が計算できる。

$$\frac{P}{\mathrm{E}I}=k^2 \qquad (15\text{−C})$$

$$P_{cr}=k^2\mathrm{E}I$$

$$=\frac{\pi^2\mathrm{E}I}{\ell^2}$$

最後に，最大曲げモーメントだが，やはり中点に生じる。つまり式(15−U)の x に $\dfrac{\ell}{2}$ を，y には δ_{max} を代入する。

$$M_x=-P(y+e)-\left(\frac{w\ell x}{2}-\frac{wx^2}{2}\right) \qquad (15\text{−U})$$

$$=-P\left\{\left(\frac{w}{Pk^2}+e\right)\left(\sec\frac{k\ell}{2}-1\right)-\frac{w\ell^2}{8P}+e\right\}-\frac{w\ell^2}{8}$$

$$=-P\left(\frac{w}{Pk^2}+e\right)\sec\frac{k\ell}{2}+\frac{w}{k^2}$$

$$=-P\left(\frac{w\mathrm{E}I}{P^2}+e\right)\sec\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{P}{\mathrm{E}I}}\right)+\frac{w\mathrm{E}I}{P}$$

【演習15−10】 接合点を左下から時計周りにA，B，C，Dとしよう。座屈するのは，荷重Pが軸圧縮荷重となるABあるいはCD。系の対称性からどちらを選んでもいいが，ここではABを例にたわみ曲線を計算していく（**図15−c**）。問題文にもある通り，接合点には曲げモーメントが生じている。それを M_0 とすると，ABの位置 x における曲げモーメント M_x は次式となる。

$$M_x=-Py+M_0 \qquad (15\text{−c})$$

これを，次の梁のたわみ曲線の微分方程式に代入する。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_x}{\mathrm{E}I_1} \qquad (15\text{-B})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{Py-M_0}{\mathrm{E}I_1} \qquad (15\text{-d})$$

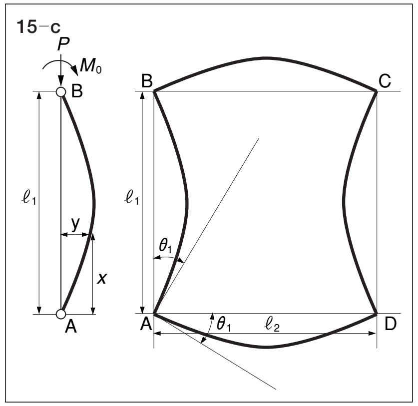
ここで，

$$\frac{P}{\mathrm{E}I_1}=k^2 \qquad (15\text{-C})$$

と置き，式(15−d)をさらに書き換える。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{\mathrm{E}I_1}y=\frac{M_0}{\mathrm{E}I_1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=k^2\frac{M_0}{P} \qquad (15\text{-d})'$$



この微分方程式の解は次の通りだ。

$$y=\mathrm{c}_1\cos kx+\mathrm{c}_2\sin kx+\frac{M_0}{P} \qquad (15\text{-e})$$

続いて，境界（端末）条件から式(15−e)中の定数c_1とc_2を決定する。条件は**図15−c**からも明らかな通り次の三つ。

条件1：接合点Aの変位がゼロ　⇔　$x=0$で$y=0$

条件2：接合点Bの変位がゼロ　⇔　$x=\ell_1$で$y=0$

条件3：中点のたわみ角がゼロ　⇔　$x=\dfrac{\ell_1}{2}$で$\dfrac{dy}{dx}=0$

これらを式(15−e)に代入していく。まず条件1。

$$y=\mathrm{c}_1\cos kx+\mathrm{c}_2\sin kx+\frac{M_0}{P} \qquad (15\text{-e})$$

$$0=\mathrm{c}_1+\frac{M_0}{P}$$

$$\mathrm{c}_1=-\frac{M_0}{P} \qquad (15\text{-f})$$

次に条件3を使おう。もちろん式(15−f)の結果も用いる。

$$\frac{dy}{dx}=-k\mathrm{c}_1\sin kx+k\mathrm{c}_2\cos kx \qquad (15\text{-g})$$

$$0=k\frac{M_0}{P}\sin\frac{k\ell_1}{2}+k\mathrm{c}_2\cos\frac{k\ell_1}{2}$$

$$\mathrm{c}_2=-\frac{M_0}{P}\tan\frac{k\ell_1}{2} \qquad (15\text{-h})$$

式(15−f)(15−h)より，たわみ曲線は以下の通り。

$$y=\mathrm{c}_1\cos kx+\mathrm{c}_2\sin kx+\frac{M_0}{P} \qquad (15\text{-e})$$

$$=-\frac{M_0}{P}\cos kx-\frac{M_0}{P}\tan\frac{k\ell_1}{2}\sin kx+\frac{M_0}{P} \qquad (15\text{-e})'$$

さて，問題の座屈荷重P_{cr}を求めるには式(15−C)を利用する。それには，kの値を計算する必要がある。何，ここまでに使っていない条件2を式(15−e)′に当てはめる？　残念ながら，それではkの値は決定できない。別の条件は何かないか——。

実は，ABのたわみ曲線を微分して計算する接合点Aのたわみ角はADの接合点Aにおけるたわみ角と等しい。**図15−c**では，いずれもθ_1。これは，この構造体がラーメン構造という“剛”の接合形態を採るためだ。肝心のたわみ角については，両端に曲げモーメントが作用する梁ADの点Aにおけるたわみ角を求めれば良い。

$$\theta_1=\frac{\delta_{\mathrm{D|A}}}{\ell_2}$$

$$=\frac{M_0\ell_2\times\dfrac{\ell_2}{2}}{\ell_2\mathrm{E}I_2}$$

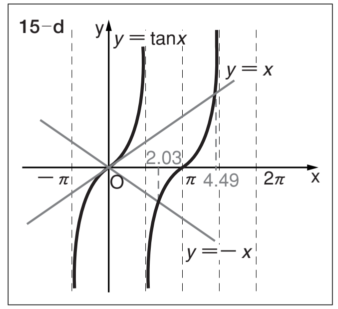
$$=\frac{M_0\ell_2}{2\mathrm{E}I_2}$$

これより，次の条件4が得られる。

条件4：$x=0$で$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{M_0\ell_2}{2\mathrm{E}I_2}$

では実際に，式(15−e)′を微分し条件4を当てはめてみよう。

$$\frac{dy}{dx}=k\frac{M_0}{P}\sin kx-k\frac{M_0}{P}\tan\frac{k\ell_1}{2}\cos kx \qquad (15\text{-i})$$



$$\frac{M_0\ell_2}{2\mathrm{E}I_2} = -k\frac{M_0}{P}\tan\frac{k\ell_1}{2}$$

$$\begin{aligned}\tan\frac{k\ell_1}{2} &= -\frac{P\ell_2}{2k\mathrm{E}I_2} \\ &= -\frac{P\ell_2}{2\mathrm{E}I_2}\sqrt{\frac{\mathrm{E}I_1}{P}} \\ &= -\frac{\ell_2}{2I_2}\sqrt{\frac{PI_1}{\mathrm{E}}} \\ &= -\frac{\ell_2 I_1}{2I_2}\sqrt{\frac{P}{\mathrm{E}I_1}} \\ &= -\frac{\ell_2 I_1}{2I_2}(k) \\ &= -\frac{I_1\ell_2}{I_2\ell_1}\left(\frac{k\ell_1}{2}\right)\end{aligned} \tag{15–j}$$

3番目の式から4番目の式への展開では式(15−C)を用いた。6番目の式から7番目の式への展開では再び式(15−C)を利用しkに戻した。結局，$\tan\frac{k\ell_1}{2}$と$y = -\frac{I_1\ell_2}{I_2\ell_1}\left(\frac{k\ell_1}{2}\right)$のグラフの交点から$\frac{k\ell_1}{2}$を，さらに$k$の値を求め，式(15−C)に代入すれば，座屈荷重$P_{cr}$が計算できる。

特殊なケースとして$I_1 = I_2$，$\ell_1 = \ell_2$の場合には，式(15−j)は以下になる。

$$\tan\frac{k\ell_1}{2} = -\frac{k\ell_1}{2}$$

この超越方程式は以前に解いた。**図15−d**は，本文の第14章の**図14−11**。これよりk，さらには座屈荷重P_{cr}が計算できる。

$$\frac{k\ell_1}{2} = 2.029$$

$$k = \frac{4.058}{\ell_1}$$

これを式(15−C)に代入すれば，座屈荷重P_{cr}が計算できる。

$$\frac{P}{\mathrm{E}I} = k^2 \tag{15–C}$$

$$\begin{aligned}P_{cr} &= k^2\mathrm{E}I_1 \\ &= \frac{16.47\mathrm{E}I_1}{\ell_1^2} \\ &= 1.668\frac{\pi^2\mathrm{E}I_1}{\ell_1^2}\end{aligned}$$